UNIVERSITÉ LAVAL

Faculté des sciences et génie
Département de mathématiques et statistique

Examen 3 — Solutions

Probabilités (STT-1500)
29 avril 2024 (8 h 30 à 10 h 20)
Enseignant : Jérôme Soucy

Question 1

Ci-dessous est représentée la fonction de masse conjointe de deux variables aléatoires X et Y.

Fonction de masse conjointe de X et Y			
	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 3$
$X = 0$	0,1	0,2	0,3
$X = 1$	0,2	0,1	0,1

(a) Que vaut $\mathbb{P}(Y = 3)$?

$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 3\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4.$

(b) Que vaut $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y \neq 3\})$?

$\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y \neq 3\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3.$

(c) Que vaut $\mathbb{P}(X > 0|Y > 0)$?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 0|Y > 0) = \frac{\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y > 0\})}{\mathbb{P}(Y > 0)} &= \frac{\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\})}{\mathbb{P}(\{Y = 1\} \cup \{Y = 3\})} \\
&= \frac{0{,}1 + 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1} \\
&= {}^{2}/_{7} \\
&\approx 0,2857.
\end{aligned}$$

(d) Que vaut $\mathbb{P}\big(X^2 + Y^2 = 1\big)$?

$\mathbb{P}\big(X^2 + Y^2 = 1\big) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 1\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4.$

(e) Supposons que $Z = XY$. Que vaut l'espérance de Z ?

Les valeurs possibles pour Z sont $0, 1$ et 3. Les événements élémentaires qui correspondent à une réalisation de l'événement $Z = 0$ sont $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 3)$ et $(1, 0)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}8.$$

Aussi, $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = 0{,}1$ et $\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 3\}) = 0{,}1$. Finalement, $\mathbb{E}(Z) = 0 \cdot \mathbb{P}(Z = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Z = 1) + 3 \cdot \mathbb{P}(Z = 3) = 0{,}4$.

(f) Soit F la fonction de répartition conjointe de X et Y. Que vaut $F(1,2)$?

> Par définition, $F(1,2) = \mathbb{P}(\{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 2\})$. En utilisant la propriété de complémentarité des probabilités, on trouve que
>
> $$F(1,2) = 1 - \mathbb{P}(\{X > 1\} \cup \{Y > 2\}) = 1 - \mathbb{P}(Y = 3) = 1 - (0{,}3 + 0{,}1) = 0{,}6.$$

(g) VRAI ou FAUX : X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

> D'une part, nous avons que $\mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = 0{,}1$. D'autre part, nous avons que $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}6$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}3$. Si les variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, nous aurions que $\mathbb{P}(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$. Or, $0{,}1 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}3$. L'énoncé est donc FAUX.

(h) Calculez la covariance des variables aléatoires X et Y.

> Par définition de la covariance, nous avons que $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Nous avons trouvé précédemment que $\mathbb{E}(XY) = 0{,}4$. On trouve que
>
> $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0 \cdot (...) + 1 \cdot (0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1) = 0{,}4, \\ \mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot (...) + 1 \cdot (0{,}2 + 0{,}1) + 3 \cdot (0{,}3 + 0{,}1) = 1{,}5. \end{aligned}$$
>
> Ainsi, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0{,}4 - 0{,}4 \cdot 1{,}5 = -0{,}2$.

Question 2

Ibrahim a installé l'application *Wake Me Zen* sur sa montre intelligente. Elle est programmée pour le réveiller entre 7 h 00 et 7 h 30, selon différents facteurs liés à la qualité de son sommeil. La distribution de son heure de réveil est supposée uniforme sur cet intervalle. Une fois réveillé, il met 35 minutes pour faire sa routine matinale avant de quitter. La durée de son trajet pour se rendre de son appartement au local PLT-2751 du pavillon Adrien-Pouliot pour son examen 3 de *STT-1500 : Probabilités* (qui débute à 8 h 30) suit une distribution exponentielle dont l'espérance est de 25 minutes, selon la circulation sur le Chemin Ste-Foy.

(a) Quelle est la probabilité qu'Ibrahim soit en retard à son examen ?

> Soit S le temps passé entre 7 h 00 et le moment où Ibrahim se présente à son examen. Notons X le temps écoulé entre 7 h 00 et le moment où il se lève. Finalement, notons Y la durée du trajet entre l'appartement d'Ibrahim et le PLT-2751. Nous avons que $S = X + 35 + Y$, où $X \sim$ uniforme $(0, 30)$ et $Y \sim$ exponentielle $(1/25)$. Nous avons déterminé le paramètre de l'exponentielle en utilisant le résultat que l'espérance d'une exponentielle est l'inverse de son paramètre. On cherche à calculer $\mathbb{P}(S > 90)$. C'est équivalent à évaluer $\mathbb{P}(X + Y > 55)$. Nous avons
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y>55) &= \mathbb{P}(Y > 55 - X)\\ &= \int_0^{30}\int_{55-x}^{\infty} f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{30}\int_{55-x}^{\infty} \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{25}\,\mathrm{e}^{-y/25}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{30}\int_0^{30}\left[-\mathrm{e}^{-y/25}\right]_{y=55-x}^{\infty}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{30}\int_0^{30}\mathrm{e}^{(x-55)/25}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{30}\left[25\,\mathrm{e}^{(x-55)/25}\right]_{x=0}^{30}\\ &= \frac{5}{6}\left(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-11/5}\right)\\ &\approx 0{,}214.\end{aligned}$$

(b) À quelle heure, en moyenne, Ibrahim arrivera-t-il au PLT-2751 ?

> En utilisant la propriété de linéarité de l'espérance et les résultats nous précisant l'espérance de variables aléatoires uniforme et exponentielle, on trouve que
>
> $$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X + 35 + Y) = \mathbb{E}(X) + 35 + \mathbb{E}(Y) = 15 + 35 + 25 = 75.$$
>
> Ainsi, Ibrahim arrive au PLT-2751 en moyenne 75 minutes après s'être levé. Il est alors 8 h 15.

Question 3

Répondez par VRAI ou FAUX aux sous-questions (a) à (e).

(a) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme $(0, 1)$. Alors $X + Y \sim$ uniforme $(0, 2)$.

> FAUX. En effet, nous avons montré en classe que la somme de deux v.a. de type uniforme avait une densité dont le graphe est de forme triangulaire, ce qui n'est pas le cas du graphe de densité d'une uniforme, qui est constant.

(b) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant pour loi une exponentielle (2024). Alors $X + Y \sim \text{gamma}\,(2, 2024)$.

> VRAI. C'est une conséquence d'un théorème vu en classe. Les variables aléatoires X et Y étant réputées indépendantes, la fonction génératrice des moments de $X + Y$ est le produit des fonctions génératrice des moments de X et de Y. Cela correspond à
>
> $$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left(1 - \frac{t}{2024}\right)^{-1}\left(1 - \frac{t}{2024}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{t}{2024}\right)^{-2} = \left(\frac{2024}{2024 - t}\right)^{2}.$$
>
> La dernière expression est la fonction génératrice des moments d'une gamma $(2, 2024)$, ce qui nous permet de conclure.

(c) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}\,(0, 1)$. Posons $Z = X/Y$. Alors $\mathbb{E}(Z) = 0$.

> FAUX. En effet, nous avons montré en classe que $Z \sim \text{Cauchy}\,(0, 1)$. De plus, nous avons aussi montré qu'une variable aléatoire dont la distribution est une Cauchy $(0, 1)$ n'a pas d'espérance. Par conséquent, l'espérance de Z n'est pas définie.

(d) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}\,(10, 8)$ et $\mathcal{N}\,(10, 7)$ respectivement. Alors $X - Y \sim \mathcal{N}\,(0, 1)$.

> FAUX. Nous avons que
>
> $$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X - Y) &= \operatorname{Var}(X + (-1)Y) + \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}((-1)Y)\\ &= \operatorname{Var}(X) + (-1)^2 \operatorname{Var}(Y)\\ &= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)\\ &= 8 + 7\\ &= 15.\end{aligned}$$
>
> La variance de $X - Y$ n'est donc pas 1, qui est la variance d'une $\mathcal{N}\,(0, 1)$.

(e) Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes dont les fonctions génératrice des moments sont $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ respectivement. Alors la fonction génératrice des moments de $X + Y$ est donnée par $M_X(t) + M_Y(t)$.

> Faux, la fonction génératrice des moments de $X + Y$ est plutôt $M_X(t)M_Y(t)$ dans cette situation.

(f) Supposons que $X \sim \text{binomiale négative}\,(5, 1/3)$. On pose $Y = 10 - \frac{X}{2}$. Que vaut ρ, le coefficient de corrélation entre X et Y ?

> Nous avons vu que s'il existe des constantes réelles a et b, avec $a < 0$, telles que $Y = aX + b$, alors $\rho = -1$. C'est le cas ici, où $a = -1/2$ et $b = 10$.

Question 4

Michel est le patron de plusieurs gestionnaires de portefeuille d'une firme de placement. À la fin de l'année, les gestionnaires à son emploi qui auront obtenu un rendement figurant dans le 75^{e} rang centile ou mieux obtiendront une prime de rendement. Les rendements (en point de pourcentage) de ses employés sont distribués selon une $\mathcal{N}\left(5, 6^2\right)$.

Déterminez le rendement minimal donnant droit à une prime de rendement.

Notons X le rendement d'un employé. D'après l'énoncé, $X \sim \mathcal{N}\left(5, 6^2\right)$. On cherche r tel que $\mathbb{P}(X < r) = 0{,}75$. Posons $Z = {}^{(X-5)}/_{6}$. Nous avons que

$$\mathbb{P}(X < r) = 0{,}75 \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(Z < \frac{r-5}{6}\right) = 0{,}75.$$

En effet, nous avons vu que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors ${}^{(X-\mu)}/_{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z < \frac{r-5}{6}\right) = 0{,}75 &\Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{r-5}{6}\right) = 0{,}75 \\
&\Longleftrightarrow \frac{r-5}{6} \approx 0{,}67 \qquad \text{(en utilisant la table)} \\
&\Longleftrightarrow r \approx 9{,}02.
\end{aligned}$$

Ainsi, les gestionnaires qui auront droit à une prime à la fin de l'année seront ceux et celles qui auront obtenu un rendement d'au moins 9,02 %.

Question 5

Soit X une variable aléatoire vérifiant $X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$. Soit $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

(a) Montrez que
$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^n \Gamma(\alpha)}.$$

En utilisant la fonction de densité d'une distribution gamma (α, λ) et la définition de l'espérance, nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{n+\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n+\alpha-1} \mathrm{e}^{-u} \frac{1}{\lambda} \, \mathrm{d}u \qquad (u = \lambda x \Rightarrow \mathrm{d}u = \lambda \, \mathrm{d}x) \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^{n+\alpha-1}} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty u^{n+\alpha-1} \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty u^{(n+\alpha)-1} \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\lambda^n \Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Remarque : Admettons qu'un étudiant ait oublié la définition de la fonction gamma d'Euler. Ce n'est pas la fin du monde, car sur la feuille de formules il avait accès la densité d'une gamma $(\alpha, 1)$.

Comme on sait que l'intégrale de la densité doit être 1, on déduit que

$$\int_0^\infty \frac{1^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-1x}\,\mathrm{d}x = 1,$$

qui entraîne immédiatement que $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(b) Utilisez les propriétés de la fonction gamma pour obtenir une expression de $\mathbb{E}(X^3)$ qui ne fait pas intervenir la fonction gamma.

Nous avons que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^3) &= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^3\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)(\alpha+2)}{\lambda^3\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}.
\end{aligned}$$

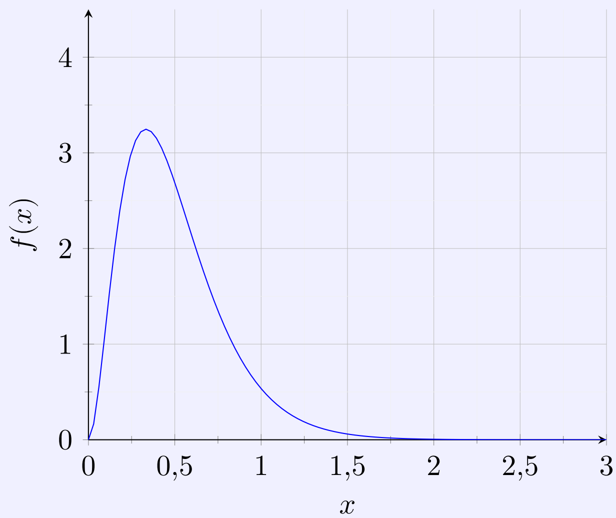
(c) Calculez le coefficient d'asymétrie de X.

Désignons par μ l'espérance de X et par σ son écart-type. L'aide-mémoire nous précise que $\mu = \alpha/\lambda$ et $\sigma^2 = \alpha/\lambda^2$. Nous avons que

$$\begin{aligned}
\gamma_X &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right) && (1)\\
&= \frac{1}{\sigma^3}\mathbb{E}(X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3) && (2)\\
&= \frac{1}{\sigma^3}\left(\mathbb{E}(X^3) - 3\mu\mathbb{E}(X^2) + 3\mu^2\mathbb{E}(X) - \mu^3\right) && (3)\\
&= \frac{1}{\sigma^3}\left(\mathbb{E}(X^3) - 3\mu\mathbb{E}(X^2) + 3\mu^3 - \mu^3\right) && (4)\\
&= \frac{1}{\sigma^3}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} + 2\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3\right) && (5)\\
&= \frac{1}{\lambda^3\sigma^3}\left(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha - 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3\right) && (6)\\
&= \frac{2\alpha}{\lambda^3\sigma^2\sigma} && (7)\\
&= \frac{2\alpha}{\lambda^3\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}\right)\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda^2}}} && (8)\\
&= \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}} && (9)\\
&= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. && (10)
\end{aligned}$$

Pour justifier cette série d'égalités, nous avons utilisé notamment la propriété de linéarité de l'espérance, voulant que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$. Pour le passage de la ligne 4 à la ligne 5, nous avons utilisé le travail réalisé dans les sous-questions précédentes pour le calcul des moments par rapport à l'origine.

Remarque 1 : Puisque $\alpha > 0$, on constate que le coefficient d'asymétrie d'une variable aléatoire de loi gamma (α, λ) est toujours bien défini et strictement positif. Cela signifie que la queue de la distribution se situe vers la droite, c'est-à-dire qu'il y a un étirement du graphe de la fonction de densité dans cette direction. De plus, le coefficient d'asymétrie d'une variable aléatoire de loi gamma (α, λ) dépend uniquement de α. Pour cette raison, il est appelé le paramètre de forme (*shape parameter*).



Graphique de la fonction de densité d'une v.a. de loi gamma $(2, 6)$.

Remarque 2 : Lorsque $\alpha \to \infty$, le coefficient d'asymétrie tend vers 0. Rappelons que le coefficient d'asymétrie d'une distribution symétrique est toujours nul. Il ne faut pas s'en surprendre dans la cas limite que nous considérons ici.

Supposons que $\alpha = n$, un nombre naturel. Puisqu'on peut voir la distribution gamma (n, λ) comme étant celle d'une somme de n variables aléatoires de loi exponentielle (λ), l'examen du graphe de la densité de S_n — la somme des n v.a. de loi exponentielle (λ) — nous permet de constater que plus n augmente, plus le graphique de sa fonction de densité ressemble à celui de la fonction de densité d'une loi normale, qui est symétrique. C'est une conséquence du théorème central limite. La suite dans le cours *STT-2000 : Statistique mathématique*.